

## Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

aula 2

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Relaxações

- **Dualidade** - obtenção de minorantes!
- O valor de qualquer SA dual é um minorante para o valor ótimo do PLI (de minimização)

**Teor.:** Dualidade Fraca:  $w(\mathbf{u}) \leq z(\mathbf{x}^*)$ ,  $\forall \mathbf{x} \in X$ ,  $\forall \mathbf{u} \in U$

**Teor.:** Dualidade Forte:

dado um par de problemas duais, se um tem SO, então o outro também tem e os valores óptimos dos dois problemas coincidem  $w^* = z^*$

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

## Exemplo

➤ Retome-se o PLI

$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{array} \right\} X \quad \mathbf{x} \in X$$

➤ Define-se a função Dual Lagrangeana como sendo:

$$\begin{aligned} \text{PLI}(\mathbf{u}): \quad z(u) &= \text{Min}_{\mathbf{x} \in X} \{x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2)\} = \\ &= \text{Min}_{\mathbf{x} \in X} \{x_1(1 - u) + x_2(-2 + u)\} \end{aligned}$$

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

## Exemplo

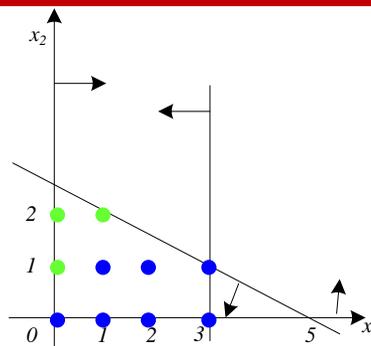
• Graficamente

$$\text{Min}_{\mathbf{x} \in X} \{x_1(1 - u) + x_2(-2 + u)\}$$

$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$u \leq 1 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}} =$$

$$u \geq 2 \quad \dots$$



$$1 \leq u \leq 2 \quad \dots$$

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



## Exemplo

## • Graficamente

$$\text{Min}_{x \in X} \{x_1(1-u) + x_2(-2+u)\}$$

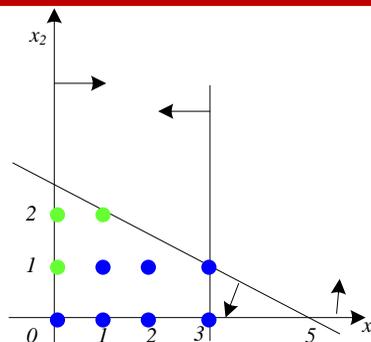
$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$u \leq 1 \quad \dots \quad \tilde{x} = (0,2)$$

$$\begin{aligned} z(u) &= x_1(1-u) + x_2(-2+u) = \\ &= 0(1-u) + 2(-2+u) = \\ &= 2u - 4 \end{aligned}$$

$$u \geq 2 \quad \dots \quad \tilde{x} = (3,0)$$

$$\begin{aligned} z(u) &= x_1(1-u) + x_2(-2+u) = \\ &= 3(1-u) + 0(-2+u) = \\ &= 3 - 3u \end{aligned}$$



$$1 \leq u \leq 2 \quad \dots$$

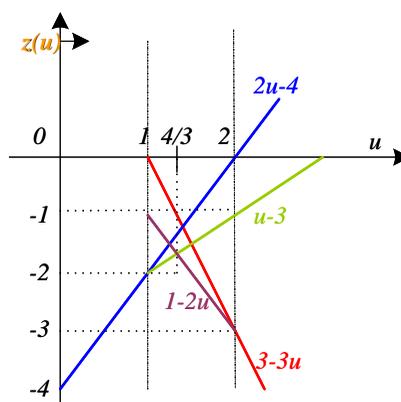
## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



## Exemplo

## ➤ Função Dual Lagrangeana

$$z(u) = \begin{cases} 2u - 4 & \text{se } 0 \leq u \leq 1 \\ u - 3 & \text{se } 1 \leq u \leq \frac{4}{3} \\ 1 - 2u & \text{se } \frac{4}{3} \leq u \leq 2 \\ 3 - 3u & \text{se } u \geq 2 \end{cases}$$

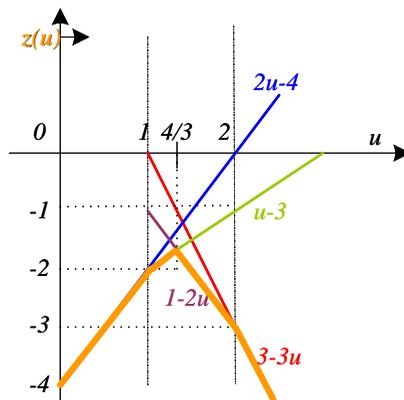


## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

## Exemplo

➤ Função Dual Lagrangeana

$$z(u) = \begin{cases} 2u - 4 & \text{se } 0 \leq u \leq 1 \\ u - 3 & \text{se } 1 \leq u \leq \frac{4}{3} \\ 1 - 2u & \text{se } \frac{4}{3} \leq u \leq 2 \\ 3 - 3u & \text{se } u \geq 2 \end{cases}$$



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

## Exemplo

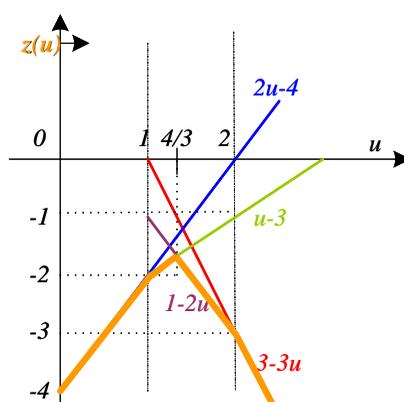
➤ Função Dual Lagrangeana

$$z(u) = \begin{cases} 2u - 4 & \text{se } 0 \leq u \leq 1 \\ u - 3 & \text{se } 1 \leq u \leq \frac{4}{3} \\ 1 - 2u & \text{se } \frac{4}{3} \leq u \leq 2 \\ 3 - 3u & \text{se } u \geq 2 \end{cases}$$

$$w_{DL} = \max_{u \geq 0} \{ z(u) \} \quad \Rightarrow \quad u = 4/3$$

$$w_{DL} = -\frac{5}{3} = z_{RL}^* \leq z^* = -1$$

O Dual Lagrangeano é um problema não linear!



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



## Exemplo

➤ Graficamente - PLI ( $u = 4/3$ )

$$\tilde{z}(4/3) = \text{Min} -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



## Exemplo

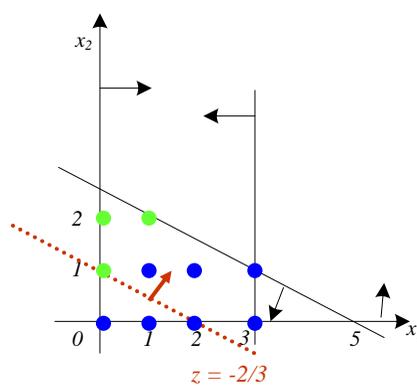
➤ Graficamente - PLI(u)

$$\tilde{z}(4/3) = \text{Min} -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = (1; 2) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3; 1)$$

$$\tilde{z}(4/3) = -\frac{5}{3} = z_{RL}$$



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



## Exemplo

- Fixando  $u = 4/3$ , e resolvendo  $PLI(u)$

$$z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{\text{Min}} \left\{ x_1 - 2x_2 + \frac{4}{3}(-x_1 + x_2) \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\tilde{z}(4/3) = \boxed{\phantom{000}}$$

[Solver...](#)

- Do Solver podemos ver que a restrição relaxada não é verificada!
- Haverá algum valor para  $u$  para o qual a SO de  $PLI(u)$  seja a SO de  $PLI$ ?
- E se tivéssemos relaxado a 2ª restrição em vez da 1ª?

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



## Relaxações

- Dado um  $PLI$  de minimização:  $z = \text{Min} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n \}$
- Uma **relaxação de  $PLI$**  é o problema:  $z' = \text{Min} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X \}$
- Se juntarmos as restrições “complicadas” à FO considerando multiplicadores obtemos, para  $\mathbf{u}=(u_1, \dots, u_m)$  fixo, o problema:

$$\mathbf{PLI}(\mathbf{u}): \quad z(\mathbf{u}) = \text{Min} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \}$$

- $\mathbf{PLI}(\mathbf{u})$  é uma relaxação de  $PLI$  – Relaxação Lagrangeana
- $\mathbf{u}$  é o vector de multiplicadores de Lagrange – variáveis duais!

## Relaxações

- $PLI(\mathbf{u})$  é uma relaxação de  $PLI$ , pois:

$$X \supseteq \{ \mathbf{x} \in X : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \}$$

$$\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \leq \mathbf{cx}$$

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$$

**Teor.:** Fraco da Dualidade Lagrangeana:  $z(\mathbf{u}) \leq z, \forall \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

- Pretendemos obter o máximo valor de  $z(\mathbf{u})$ , resolvendo o **Dual Lagrangeano**:

$$w_{DL} = \max \{ z(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \}$$

E se:

Restrições Relaxadas " $\geq$ " ou " $=$ " ?

## Relaxações

- **Dualidade Lagrangeana** – se podemos obter apenas minorantes com o problema dual (de difícil resolução!) – com a Dualidade Lagrangeana podemos reforçar tais limites!
- Árvore geradora mínima (SST) com restrições (capacidade ou grau)
  - SST
  - com restrições relaxadas penalizadas e juntas à F.O.!

## Relaxações

**Teor.:** Forte da Dualidade Lagrangeana: Se  $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$ ,

- i.  $\tilde{\mathbf{x}}$  é S.O. de  $\text{PLI}(\tilde{\mathbf{u}})$  e
- ii.  $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$  (SPA) e
- iii.  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$  (complementaridade)

então,  $\tilde{\mathbf{x}}$  é S.O. De  $\text{PLI}$ .

Prova: ...

## Relaxações

**Teor.:** Forte da Dualidade Lagrangeana: Se  $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$ ,

- i.  $\tilde{\mathbf{x}}$  é S.O. de  $\text{PLI}(\tilde{\mathbf{u}})$  e
- ii.  $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$  (SPA) e
- iii. (complementaridade)  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

então,  $\tilde{\mathbf{x}}$  é S.O. de  $\text{PLI}$ .

Prova:

$$w_{DL} = \max_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \{z(\mathbf{u})\} \geq z(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) \stackrel{\text{(iii)}}{=} \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} \stackrel{\text{(ii)}}{\geq} z^*$$

(ii)  $\tilde{\mathbf{x}}$  é SA de  $\text{PLI}$

Sendo relaxação,  $w_{DL} \leq z^* \Rightarrow w_{DL} = z^*$



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Relaxações

PLI  $z = \text{Min} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n \}$

PLI (u)  $z(u) = \text{Min} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \in X \}$

DL  $w_{DL} = \max_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \{ z(\mathbf{u}) \}$

$z(\mathbf{u}) \leq z$

$w_{DL} \leq z$

PLI  $z = \text{Min} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{Dx} \leq \mathbf{d}, \mathbf{Tx} = \mathbf{t}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n \}$

PLI (u, v, y)  $z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = \text{Min} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{v}(\mathbf{d} - \mathbf{Dx}) + \mathbf{y}(\mathbf{t} - \mathbf{Tx}) : \mathbf{x} \in X \}$

DL  $w_{DL} = \max \{ z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \leq \mathbf{0}, \mathbf{y} \text{ livre} \}$

$\geq 0$

$= 0$

SIMULACÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2017/18 47



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Relaxações

PLI  $z = \text{Max} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n \}$

PLI (u)  $z(u) = \text{Max} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \in X \}$

DL  $w_{DL} = \min_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \{ z(\mathbf{u}) \}$

$z(\mathbf{u}) \geq z$

$w_{DL} \geq z$

PLI  $z = \text{Max} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{Dx} \geq \mathbf{d}, \mathbf{Tx} = \mathbf{t}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n \}$

PLI (u, v, y)  $z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = \text{Max} \{ \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{v}(\mathbf{d} - \mathbf{Dx}) + \mathbf{y}(\mathbf{t} - \mathbf{Tx}) : \mathbf{x} \in X \}$

DL  $w_{DL} = \min \{ z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \leq \mathbf{0}, \mathbf{y} \text{ livre} \}$

$\leq 0$



SIMULACÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2017/18 48

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



### Relaxações

- Prova-se que o valor **ótimo** do Dual Lagrangeano nunca é pior que o da relaxação linear:

$$z_{RL} \leq w_{DL} \leq z^*$$

- Quando um problema goza da **propriedade de integralidade** o valor ótimo do Dual Lagrangeano coincide com o da sua relaxação Linear:

$$z_{RL} = w_{DL} \leq z^*$$

- Como obter “bons” multiplicadores de Lagrange?

$$\mathbf{u} = ?$$

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



### Exemplo

- Resolver o Dual Lagrangeano de um PLI – Problema Não Linear!

- A Função Dual,  $z(\mathbf{u})$ , é:

- Linear por troços e côncava

- Se, ao fixar  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$

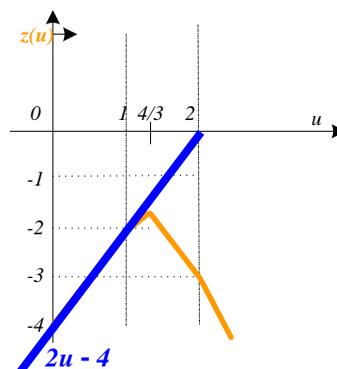
- $z(\tilde{\mathbf{u}})$  tiver SO única,  $\tilde{\mathbf{x}}$

⇒  $z(\tilde{\mathbf{u}})$  é diferenciável com gradiente  $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$

$$\text{Ex.: } z(\tilde{\mathbf{u}}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{\text{Min}} \{x_1(1-\tilde{u}) + x_2(\tilde{u}-2)\}$$

$$\tilde{u} < 1 :$$

gradiente:  $-x_1 + x_2 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$  em  $\tilde{\mathbf{x}} = (0,2)$  declive de  $z(\mathbf{u})!$



## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



## Exercícios

1. Escrever a Relaxação Lagrangeana dos seguintes PLI, relaxando as restrições assinaladas com (\*):

a)  $Max Z = 16x_1 + 10x_2 + 4x_4$

b)  $Min Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 & (*) \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 3 & (*) \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 3 & (*) \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

2. Resolver os problemas relaxados do exercício 1 considerando, em cada alínea, os multiplicadores seguintes:

a) i)  $u = 2$ ; ii)  $u = 0,5$ ; iii)  $u = 6$ ; iv)  $u = 1$

b) i)  $\mathbf{u} = (1,1)$ ; ii)  $\mathbf{u} = (0,1)$ ; iii)  $\mathbf{u} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ ; iv)  $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$ .

## OTIMIZAÇÃO INTEIRA



## Trabalho 1

Considere o seguinte problema de PLIM

$$Min \ 8x_{11} + 7x_{21} + 4x_{22} + x_{31} + 3x_{32} + 36y_1 + 12y_2 + 36y_3$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 6 & (*) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 6 & (*) \\ x_{11} + x_{12} \leq 12y_1 \\ x_{21} + x_{22} \leq 12y_2 \\ x_{31} + x_{32} \leq 12y_3 \\ y_i \in \{0, 1\}; \ 0 \leq x_{ij} \leq 6 \quad i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2 \end{cases}$$

- a) Considerando  $\mathbf{u} = (4,6)$  defina e resolva a relaxação Lagrangeana do problema, relaxando as restrições assinaladas com (\*).
- b) Identificar este problema como uma instância de um problema estudado no mestrado, definindo as variáveis de forma compatível.